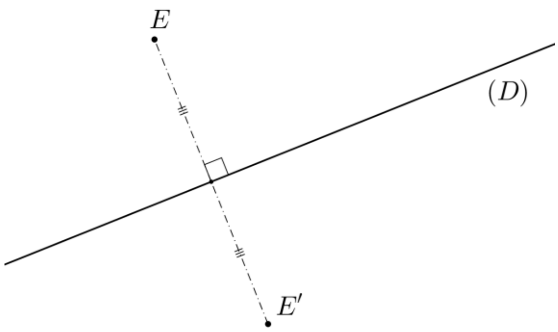
I_ Le symétrique d'un point par rapport à une droite :

1/ Exemple :

Soit (D) une droite et E un point à l'extérieur de (D).

Traçons le point E' tel que : la droite (D) est médiatrice du segment $[EE']$.

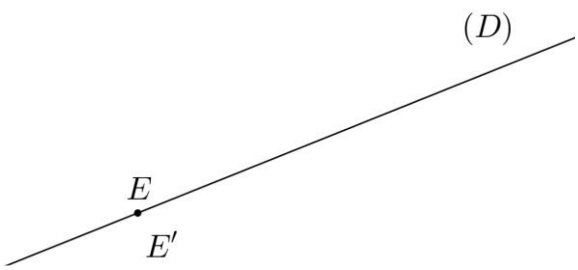
a)_ Premier cas : si $E \notin (D)$.



Le point E' est appelé : Le symétrique du point E par rapport à la droite (D).

La droite (D) est appelée : Axe de symétrie.

b)_ Deuxième cas : si $E \in (D)$.



On remarque que E *et* E' sont deux points confondus.

Donc : Le symétrique du point E par rapport à la droite (D) est le point E lui-même.

2/ Définition :

Dire que le symétrique d'un point M par rapport à une droite (D) est :

- Le point M' tel que : (D) est la médiatrice du segment $[MM']$, si $M \notin (D)$.
- Le point M lui-même, si $M \in (D)$.

*/ Remarques importantes

Si le point M' est le symétrique d'un point M par rapport à une droite (D), alors M est aussi le symétrique de M' par rapport à (D).

On dit que les points M et M' sont deux points symétriques par rapport à (D).

3/ Propriétés de conservation :

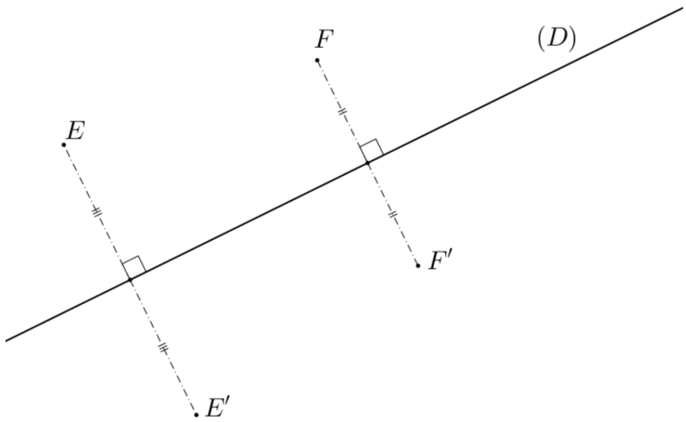
a)_ Conservation de distances (Longueurs) :

$a_1)$_ Exemple :

Soient (D) une droite et A et B deux points tels que :

$A \notin (D)$, $B \notin (D)$ et $AB = 5\,cm$.

A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport à (D).



Avec la règle déterminons la distance $E'F'$:

On trouve que : $E'F' = 5\,cm$.

Donc : on déduit que : $EF = E'F'$.

$a_2)$_ Propriété :

Si les points A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport à une droite, alors : $AB = A'B'$.

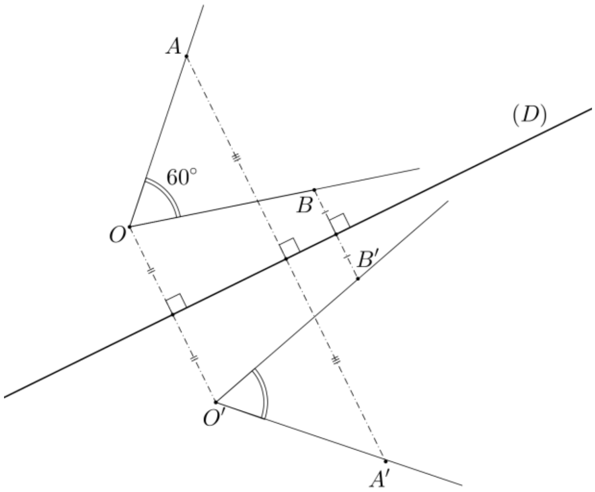
On dit que : la symétrie axiale conserve les distances (Les longueurs)

b)_ Conservation de mesures d'angles :

$b_1)$_ Exemple :

Soient (D) une droite et $A\hat{O}B$ un angle tel que : $A\hat{O}B = 60^\circ$

A', O' et B' sont les symétriques respectifs des points A, O et B par rapport à la droite (D).



Avec le rapporteur déterminons la mesure de l'angle $A'\hat{O}'B'$:

On trouve que : $A'\hat{O}'B' = 60^{\circ}$.

Donc : on déduit que : $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$.

b_2)_Propriété :

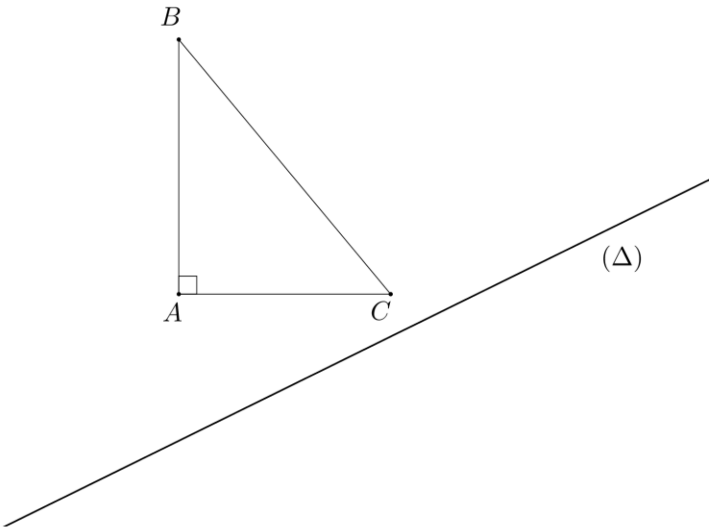
Si les points A', O' et B' sont les symétriques respectifs des points A, O et B par rapport à une droite, alors : $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$.

On dit que : la symétrie axiale conserve les mesures d'angles.

*/ Exercice d'application :

On considère la figure suivante telle que :

ABC est un triangle rectangle en A et $AB = 6\,cm$.



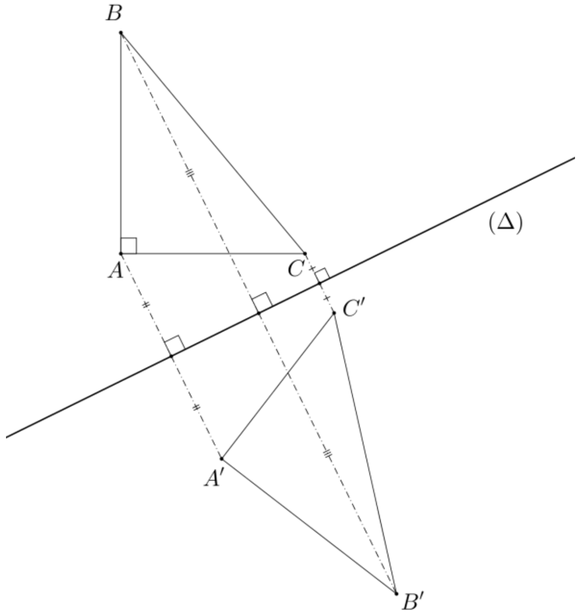
1/ Reproduire la figure ci-dessus puis tracer A', B' et C' les symétriques respectifs de A, B et C par rapport à la droite (Δ).

2/ Montrer que : $A'B' = 6\,cm$.

3/ Montrer que $A'B'C'$ est un triangle rectangle en A'.

*/ Solution :

1/ La figure :



2/ Montrons que : $A'B' = 6\,cm$.

On sait que :

A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport à la droite (Δ).

Donc : $A'B' = AB$.

Et puisque : $AB = 6\,cm$, alors : $\boxed{A'B' = 6\,cm}$.

3/ Montrons que : $A'B'C'$ est un triangle rectangle .

On sait que :

A', B' et C' sont les symétriques respectifs des points A, B et C par rapport à la droite (Δ).

Donc : $B'\hat{A}'C' = B\hat{A}C$.

Et puisque : ABC est un angle droit , alors $A'B'C'$ est aussi un angle droit.

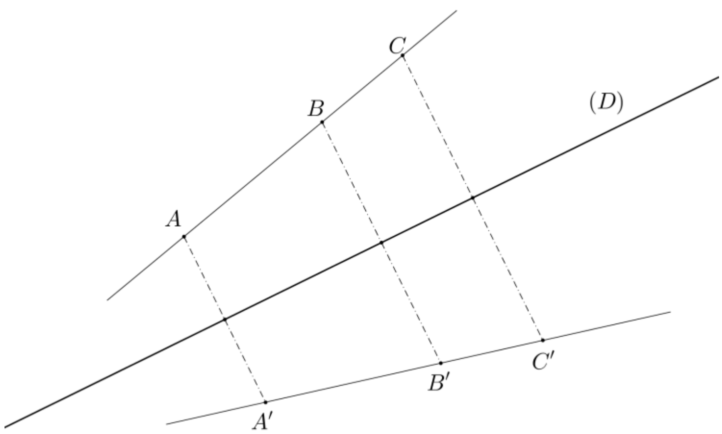
D'où : le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A'.

d)_ Conservation d'alignement des points :

c_1)_ Exemple :

Soient (D) une droite et A, B et C sont trois points alignés.

A', B' et C' sont les symétriques respectifs des points A, B et C par rapport à la droite (D).



On remarque que les points A' , B' et C' sont aussi alignés.

c_2)_ Propriété :

Si les points A' , B' et C' sont les symétriques respectifs des points alignés A , B et C par rapport à une droite, alors : A' , B' et C' sont aussi des points alignés.
On dit que : la symétrie axiale conserve l'alignement des points.

II_ Le symétrique des figures de base :

1/ Le symétrique d'une droite :

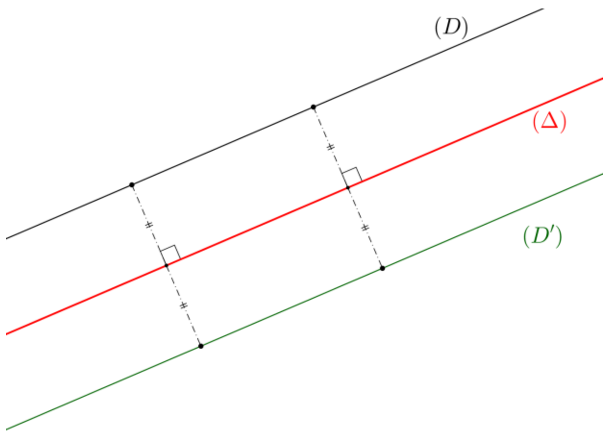
a)_ Parallèle à l'axe de symétrie :

a_1)_ Exemple :

Soient (D) et (Δ) deux droites telles que : $(D)//(\Delta)$.

Construisons (D') le symétrique de (D) par rapport à (Δ).

Pour cela on va choisir deux points (sans les nommés) sur (D), puis on va tracer leurs symétriques par rapport à (Δ).



On remarque que : $(D')//(\Delta)$.

a_2)_ Propriété :

Le symétrique d'une droite parallèle à l'axe de symétrie par rapport à une droite est une droite qui lui est parallèle.

b)_ Coupe à l'axe de symétrie en un point :

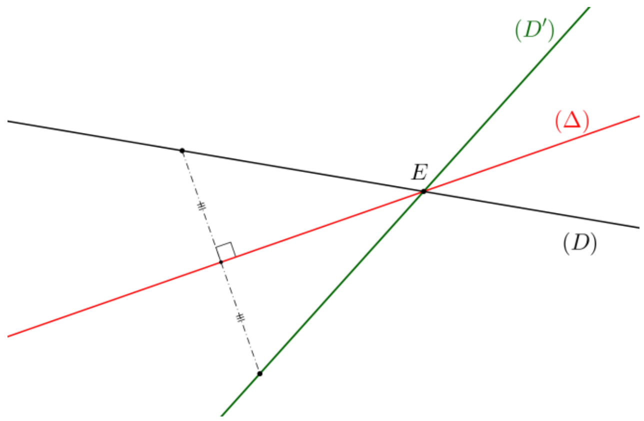
b_1)_ Exemple :

Soient (D) et (Δ) deux droites telles que : (D) coupe (Δ) en un point E .

Construisons (D') le symétrique de (D) par rapport à (Δ).

Pour cela on va choisir un point (sans le nommé) sur (D), puis on va tracer son symétrique ainsi que celui du point E par rapport à (Δ).

(Or le symétrique de E est lui-même, car $E \in (D)$)



On remarque que : (D') coupe aussi (Δ) en E.

$b_2)$ _ Propriété :

Le symétrique d'une droite qui coupe l'axe de symétrie en un point par rapport à une droite est une droite qui l'axe de symétrie au même point.

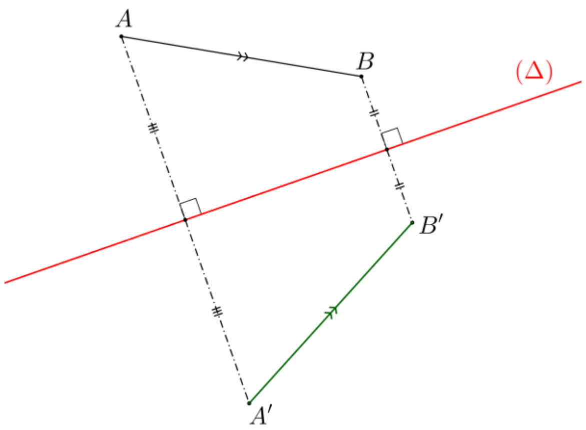
2/ Le symétrique d'un segment :

a)_ Exemple :

Soit (Δ) une droite et $[AB]$ un segment.

Construisons le segment $[A'B']$ le symétrique de $[AB]$ par rapport à (Δ).

Pour cela on va construire A' et B' les symétriques respectifs de A et B par rapport à (Δ).



Les segments $[AB]$ et $[A'B']$ ont même longueur , car la symétrie centrale conserve les longueurs.

b)_ Propriété :

Le symétrique d'un segment par rapport à une droite est un segment de même longueur .

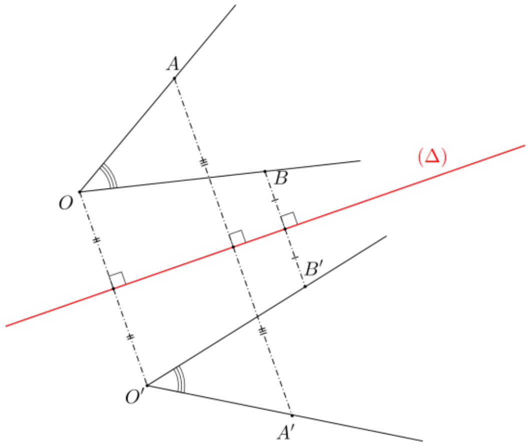
3/ Le symétrique d'un angle :

a)_ Exemple :

Soit (Δ)une droite et $A\hat{O}B$ un angle.

Construisons l'angle $A'\hat{O}'B'$ le symétrique de $A\hat{O}B$ par rapport à (Δ).

Pour cela on va construire $A', O'\ et\ B'$ les symétriques respectifs de $A, O\ et\ B$ par rapport à (Δ).



Les angles $A\hat{O}B\ et\ A'\hat{O}'B'$ ont même mesure, car la symétrie centrale conserve les mesures d'angles.

b)_ Propriété :

Le symétrique d'un angle par rapport à une droite est un angle de même mesure .

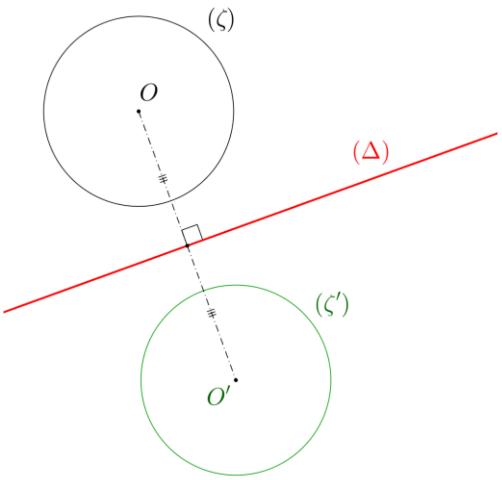
3/ Le symétrique d'un cercle :

a)_ Exemple :

Soit (Δ)une droite et (ζ) un cercle de centre O et de rayon r.

Construisons le cercle (ζ') le symétrique de (ζ) par rapport à (Δ).

Pour cela on va construire O' le symétrique de O par rapport à (Δ) et on va garder le même rayon.



Les deux cercles (ζ) *et* (ζ') ont même rayon, car la symétrie axiale conserve les longueurs.

III_ L'axe de symétrie d'une figure :

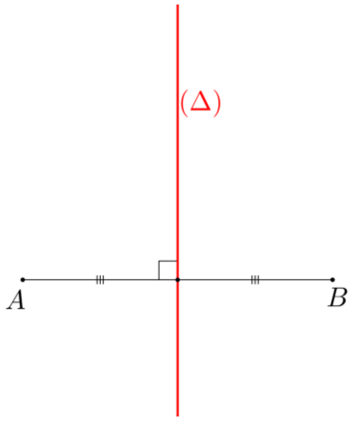
1/ Définition :

On dit qu'une droite (D) est un axe de symétrie d'une figure $(\mathcal{F})$ lorsque le symétrique de $(\mathcal{F})$ par rapport à (D) est $(\mathcal{F})$ elle-même.

2/ Axes de symétrie de quelques figures usuelles :

a)_ Le segment :

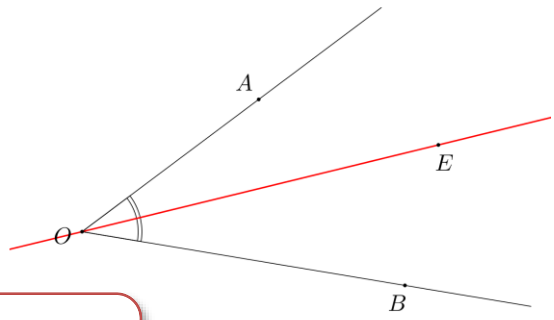
L'axe de symétrie d'un segment est sa médiatrice.



La droite (Δ) médiatrice du segment $[AB]$ est l'axe de symétrie de ce segment

b)_ L'angle :

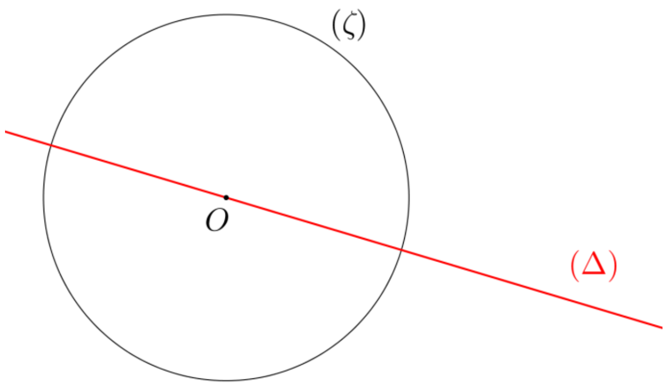
L'axe de symétrie d'un angle est sa bissectrice.



La droite (OE) bissectrice de l'angle $A\hat{O}B$ est l'axe de symétrie de cet angle

c)_ Le cercle :

L'axe de symétrie d'un cercle est toute droite passant par le centre de ce cercle.



La droite (Δ) est un axe de symétrie du cercle (ζ)