Les puissances

2ASC

Mathématiques

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⴳ ⴰⵙⵏⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
لتكوين المهني

Académie Régionale d'Éducation et de Formation
Région de Casablanca - Settat
Direction Provinciale de Mohammedia

I_ Puissance d'un nombre rationnel :

1/ Puissances à exposant positif :

a)_ Définition :

Soient a un nombre rationnel et n un nombre entier strictement supérieur à 1.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

b)_ Vocabulaires :

*/ a^n est une puissance du nombre a et se lit : a exposant n ou a puissance n.

*/ Le nombre n est appelé exposant.

*/ a^2 se lit : a exposant 2 ou a puissance 2 ou a au carré.

*/ a^3 se lit : a exposant 3 ou a puissance 3 ou a au cube.

c)_ Exemples :

$11^3 = 11 \times 11 \times 11$; $(-5)^2 = (-5) \times (-5)$

$\left(\frac{7}{9}\right)^4 = \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9}$; $\left(\frac{-13}{6}\right)^3 = \left(\frac{-13}{6}\right) \times \left(\frac{-13}{6}\right) \times \left(\frac{-13}{6}\right)$

d)_ Cas particulier :

Si a un nombre rationnel non nul, alors : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

*/ Exemples :

$14^0 = 1$; $(-15)^0 = 1$; $\left(\frac{11}{45}\right)^0 = 1$; $\left(\frac{-27}{14}\right)^0 = 1$

$17^1 = 17$; $(-25)^1 = -25$; $\left(\frac{22}{15}\right)^1 = \frac{22}{15}$; $\left(\frac{-11}{10}\right)^1 = \frac{-11}{10}$

*/ Remarque : La puissance 0^0 n'existe pas.

2/ Puissances à exposant négatif :

a)_ Définition :

Soient x et $\frac{a}{b}$ deux nombres rationnels non nuls et n un entier positif.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad et \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

b)_ Exemples :

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} \quad ; \quad (-11)^{-9} = \frac{1}{(-11)^9} \quad ; \quad \left(\frac{5}{7}\right)^{-11} = \left(\frac{7}{5}\right)^{11} \quad ; \quad \left(\frac{-13}{25}\right)^{-2} = \left(\frac{-25}{13}\right)^{2}$$

3/ Le signe d'une puissance d'un nombre négatif :

a)_ Propriété :

Une puissance d'un nombre rationnel négatif est :

- Positive, si son exposant est un nombre pair.
- Négative si don exposant est un nombre impair.

b)_ Exemples :

$(-125)^{12}$ est un nombre positif, car 12 est un nombre pair.

$\left(\frac{-117}{19}\right)^{31}$ est un nombre négatif, car 31 est un nombre impair.

c)_ Remarques importantes :

1/ $(-5)^2 \neq -5^2$

$$\begin{cases} (-5)^2 = 25 & \textit{est un nombre positif} \\ -5^2 = -25 & \textit{est un nombre négatif} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} (-5)^2 & \textit{est une puissance} \\ -5^2 & \textit{c'est l'opposé d'une puissance} \end{cases}$$

2/ $(-5)^3 = -5^3$

$$\begin{cases} (-5)^3 = -125 & \textit{est un nombre négatif} \\ -5^3 = -125 & \textit{est un nombre négatif} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} (-5)^3 & \textit{est une puissance} \\ -5^3 & \textit{c'est l'opposé d'une puissance} \end{cases}$$

*/ Exercice d'application :

Calculer : 25^2 ; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$; $\left(\frac{-7}{5}\right)^{-3}$; $\left(\frac{-9}{7}\right)^{-2}$; $\left(\frac{-1}{2}\right)^{5}$

*/ Solution :

$$25^2 = 25\times 25 = 625$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3} = \frac{64}{27}$$

$$\left(\frac{-7}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{-5}{7}\right)^{3} = -\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7} = -\frac{125}{343}$$

$$\left(\frac{-9}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{-7}{9}\right)^{2} = \frac{7}{9}\times\frac{7}{9} = \frac{49}{81}$$

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^{5} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{32}$$

II_ Les opérations sur les puissances :

1/ Produit de deux puissances d'un même nombre :

a)_ Propriété :

Soient a un nombre rationnel non nul et m et n deux nombres entiers relatifs.

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

b)_ Exemples :

$$11^{14}\times 11^{8} = 11^{14+8} = 11^{22}$$

$$17^{-5}\times 17^{-10} = 17^{-5-10} = 17^{-15}$$

$$\left(\frac{-7}{5}\right)^{11}\times\left(\frac{-7}{5}\right)^{-20} = \left(\frac{-7}{5}\right)^{11-20} = \left(\frac{-7}{5}\right)^{-9}$$

2/ Produit de deux puissances de même exposant :

a)_ Propriété :

Soient a et b deux nombres rationnels non nuls et n un nombre entier relatif.

$$a^n \times b^n = (a\times b)^n$$

b)_ Exemples :

$25^{14}\times10^{14}=(25\times10)^{14}$; $30^{-5}\times2^{-5}=(30\times2)^{-5}$; $\left(\frac{-5}{11}\right)^{11}\times\left(\frac{2}{7}\right)^{11}=\left(\frac{-5}{11}\times\frac{2}{7}\right)^{11}$

$=250^{14}$; $=60^{-5}$; $=\left(\frac{-10}{77}\right)^{11}$

3/ Quotient de deux puissances d'un même nombre :

a)_ Propriété :

Soient a un nombre rationnel non nul et m et n deux nombres entiers relatifs.

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

b)_ Exemples :

$\frac{12^{23}}{12^{15}}=12^{23-15}$; $\frac{(-9)^{-14}}{(-9)^{30}}=(-9)^{-14-30}$; $\frac{\left(\frac{7}{11}\right)^{-17}}{\left(\frac{7}{11}\right)^{-20}}=\left(\frac{7}{11}\right)^{-17+20}$

$=12^{8}$; $=(-9)^{-44}$; $=\left(\frac{7}{11}\right)^{3}$

4/ Quotient de deux puissances de même exposant :

a)_ Propriété :

Soient a et b deux nombres rationnels non nuls et n un nombre entier relatif.

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

b)_ Exemples :

$\frac{16^{25}}{12^{25}}=\left(\frac{16}{12}\right)^{25}$; $\frac{(-27)^{-15}}{(18)^{-15}}=\left(\frac{-27}{18}\right)^{-15}$; $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{3}}{\left(\frac{-1}{3}\right)^{3}}=\left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{-1}{3}}\right)^{3}$

$=\left(\frac{4}{3}\right)^{25}$; $=\left(\frac{-3}{2}\right)^{-15}$; $=\left(\frac{2}{5}\times\frac{-3}{1}\right)^{3}$

$=\left(\frac{-6}{5}\right)^{3}$

5/ Puissance d'une puissance :

a)_ Propriété :

Soient a un nombre rationnel non nul et n et m deux nombres entiers relatifs.

$$\left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$$

b)_ Exemples :

$$\left(12^{-5}\right)^4 = 12^{-5\times 4} \quad ; \quad \left(\left(\frac{-7}{6}\right)^{11}\right)^{-6} = \left(\frac{-7}{6}\right)^{11\times(-6)} \quad ; \quad \left(\left(-17\right)^{-10}\right)^{-9} = \left(-17\right)^{-10\times(-9)}$$

$$= 12^{-20} \qquad\qquad = \left(\frac{-7}{6}\right)^{-66} \qquad\qquad = \left(-17\right)^{90}$$

*/ Exercice d'application 1 :

Ecrire sous la forme a^n avec n différent de 1 et -1 puis calculer :

$$A = \frac{-1}{2}\times\left(\frac{-1}{2}\right)^2 \quad ; \quad B = \left(\frac{11}{7}\right)^{11}\times\left(\frac{11}{7}\right)^{-11} \quad ; \quad C = \frac{5^7}{5^6\times\left(\left(5\right)^2\right)^{-1}} \quad ; \quad D = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3}$$

*/ Solution :

$$A = \frac{-1}{2}\times\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^{1+2} = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{8}$$

$$B = \left(\frac{11}{7}\right)^{11}\times\left(\frac{11}{7}\right)^{-11} = \left(\frac{11}{7}\right)^{11-11} = \left(\frac{11}{7}\right)^0 = 1$$

$$C = \frac{5^7}{5^6\times\left(\left(5\right)^2\right)^{-1}} = \frac{5^7}{5^6\times 5^{-2}} = \frac{5^7}{5^{6-2}} = \frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3 = 125$$

$$D = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^3} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\frac{3}{2}\right)^6} = \left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\right)^6 = \left(1\right)^6 = 1$$

*/ Exercice d'application 2 :

Soient a et b deux nombres rationnels non nuls.

Transformer en une seule puissance dont l'exposant diffèrent de 1 et -1 :

$$x = a^{-3} \times a^{4} \times \frac{1}{a^{7}} \quad ; \quad y = \frac{\left(a^{5} \times a\right)^{-2}}{a^{3}} \quad ; \quad z = \frac{\left(a \times b^{2}\right)^{-3} \times a}{a^{-5} \times b^{-3}}$$

$$t = \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \times a^{5} \times \left(\frac{1}{b}\right)^{5} \quad ; \quad u = \frac{\left(a^{2}\right)^{-3} \times a^{-5}}{\frac{1}{b} \times \left(b^{5}\right)^{-2}}$$

*/ Solution :

$$x = a^{-3} \times a^{4} \times \frac{1}{a^{7}} \quad ; \quad y = \frac{\left(a^{5} \times a\right)^{-2}}{a^{3}} \quad ; \quad z = \frac{\left(a \times b^{2}\right)^{-3} \times a}{a^{-5} \times b^{-3}}$$

$$= a^{-3+4} \times a^{-7} \qquad = \frac{\left(a^{5+1}\right)^{-2}}{a^{3}} \qquad = \frac{a^{-3} \times \left(b^{2}\right)^{-3}}{a^{-5} \times b^{-3}}$$

$$= a^{1-7} \qquad = \frac{\left(a^{6}\right)^{-2}}{a^{3}} \qquad = \frac{a^{-3} \times b^{-6}}{a^{-3} \times b^{-3}}$$

$$= a^{-6} \qquad = \frac{a^{-12}}{a^{3}} \qquad = a^{-3} \times b^{-6} \times a^{3} \times b^{3}$$

$$= a^{-12-3} \qquad = a^{-3+3} \times b^{-6+3}$$

$$= a^{-15} \qquad = a^{0} \times b^{-3}$$

$$= 1 \times b^{-3}$$

$$= b^{-3}$$

$$t = \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \times a^{5} \times \left(\frac{1}{b}\right)^{5} \quad ; \quad u = \frac{\left(a^{2}\right)^{-3} \times a^{-5}}{\frac{1}{b} \times \left(b^{5}\right)^{-2}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \times \left(5 \times \frac{1}{b}\right)^{5} \qquad = \frac{a^{-6} \times a^{-5}}{\frac{b^{-10}}{b}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{5} \qquad = \frac{a^{-6-5}}{b^{-10-1}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{-3+5} \qquad = \frac{a^{-11}}{b^{-11}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{2} \qquad = \left(\frac{a}{b}\right)^{-11}$$

III_ L'écriture scientifique :

1/ Puissance de 10 :

a)_ Propriété :

Soit n un nombre entier naturel non nul.

$$10^n = \underbrace{1000000............0}_{n \text{ zeros}} \quad et \quad 10^{-n} = \underbrace{0,000000...............01}_{n \text{ zeros}}$$

b)_ Exemples :

$10^5 = 100000$; $10^{-7} = 0,0000001$

$10000000000 = 10^{10}$; $0,000000000000 = 10^{-13}$

2/ Ecriture scientifique :

a)_Définition :

Soient a un nombre décimal et n un nombre entier relatif non nul.

Toute écriture de la forme $x = a \times 10^n$ *ou* $x = -a \times 10^n$:

S'appelle écriture scientifique de x avec $1 \leq a < 10$

b)_ Exemples :

Cherchons l'écriture scientifique des nombres suivants :

$a = 3452$; $b = -0,00000234$; $c = 678,25 \times 10^5$; $d = -0,000254 \times 10^{-9}$

$e = -24,5 \times 10^{-11} \times 1,2 \times 10^3$; $f = -113 \times 10^5 + 7,2 \times 10^7$

1/ On a : $a = 3452$

Donc : $a = 3,452 \times 10^3$.

D'où : l'écriture scientifique de a est : $3,452 \times 10^3$.

2/ on a : $b = -0,00000234$

Donc : $b = -2,34 \times 10^{-6}$.

D'où : l'écriture scientifique de b est : $-2,34 \times 10^{-6}$.

3/ on a : $c = 678,25 \times 10^5$

Donc : $c = 6,7825 \times 10^2 \times 10^5$.

$= 6,7825 \times 10^7$

D'où : l'écriture scientifique de c est : $6,7825 \times 10^7$.

4/ On a : $d = -0,000254 \times 10^{-9}$

Donc : $d = -2,54 \times 10^{-4} \times 10^{-9}$.

$= -2,54 \times 10^{-13}$

D'où : l'écriture scientifique de d est : $-2,54 \times 10^{-13}$.

5/ On a : $e = -24,5 \times 10^{-11} \times 1,2 \times 10^{3}$

Donc : $e = -24,5 \times 1,2 \times 10^{-11} \times 10^{3}$.

$= -29,4 \times 10^{-8}$

$= -2,94 \times 10^{1} \times 10^{-8}$

$= -2,94 \times 10^{-7}$

D'où : l'écriture scientifique de e est : $-2,94 \times 10^{-7}$.

6/ On a : $f = -113 \times 10^{5} + 7,2 \times 10^{7}$

Donc : $f = -113 \times 10^{5} + 7,2 \times 10^{2} \times 10^{5}$.

$= -113 \times 10^{5} + 720 \times 10^{5}$

$= (-113 + 720) \times 10^{5}$

$= 607 \times 10^{5}$

$= 6,07 \times 10^{2} \times 10^{5}$

$= 6,07 \times 10^{7}$

D'où : l'écriture scientifique de f est : $6,07 \times 10^{7}$.